

Università degli Studi di Cagliari

DICAAR - Facoltà di Ingegneria-Architettura

Corso di Laurea in Scienze dell'Architettura

## CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2024-2025

Prova scritta in aula del 14.01.2025

Parte II - Testo 1

*Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui solli fogli a quadretti che sono stati forniti.*

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

### Esercizio n. 1 (17 punti)

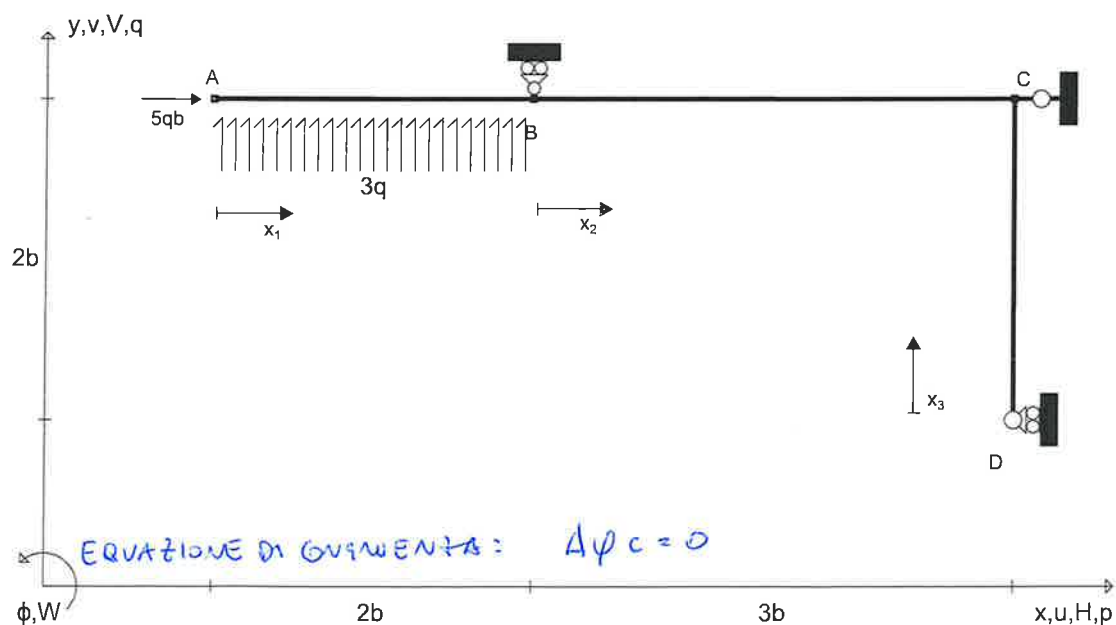
Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità  $C$ ,  $M_C$ . Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, la componente di spostamento verticale del punto  $A$ ,  $v_A$ .

*Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.*

Università' di Cagliari

SdC\_SdA 2 14.01.25\*001



## Esercizio n. 2 (7 punti)

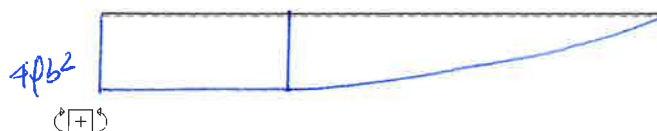
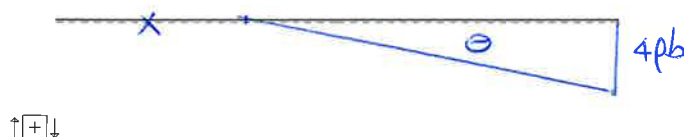
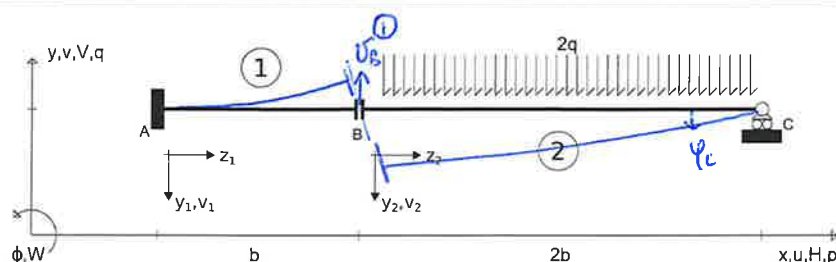
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

1. La deformata della linea d'asse,  $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$ ;
2. La sua derivata prima,  $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$ ;
3. La rotazione del punto  $C$ ,  $\varphi_C$ ;
4. Lo spostamento verticale del punto  $B$  relativo al primo tratto,  $v_B^{(1)}$ .

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 2 14.01.25\*001



$$H_A (\Rightarrow) = 0; V_A (\uparrow) = 0; M_A (\mathcal{D}) = -4pb^2; V_C (\uparrow) = 4pb$$

$$N_{AB} = //; T_{AB} = //; M_{AB} = 4pb^2$$

$$N_{BC} = //; T_{BC} = -2pz_2; M_{BC} = 4pb^2 - qz_2^2$$

$$\text{c.c in } A = v_1(z_1=0)=0; v_1'(z_1=0)=0; \text{c.c in } B = v_1'(z_1=b)=v_2'(z_2=0)$$

$$\text{c.c in } C = v_2(z_2=4b)=0$$

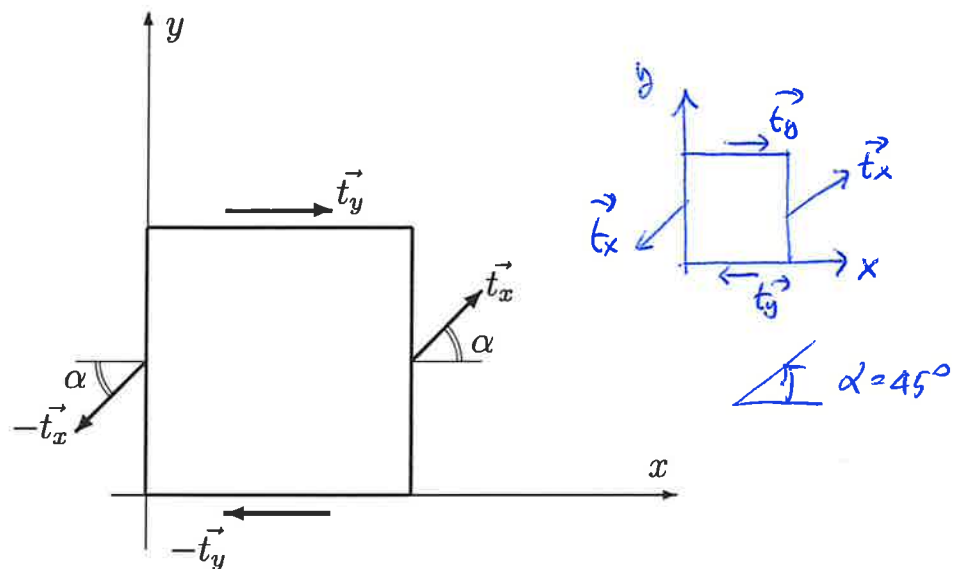
$$v_1(z_1) = \frac{1}{EI} (-2pb^2 z_1^2); v_1'(z_1) = \frac{1}{EI} (-4pb^2 z_1)$$

$$v_2(z_2) = \frac{1}{EI} (-2pz_2^3 + \frac{1}{2}pz_2^4 - 4pb^2 z_2 + \frac{4}{3}pb^3); v_2'(z_2) = \frac{1}{EI} (-4pb^2 z_2 + \frac{1}{3}pz_2^3 - 4pb^2)$$

$$v_B^{(1)} = -2pb^4/EI (\uparrow); \varphi_C = -28qb^3/3EI (\downarrow)$$

### Esercizio n. 3 (9 punti)

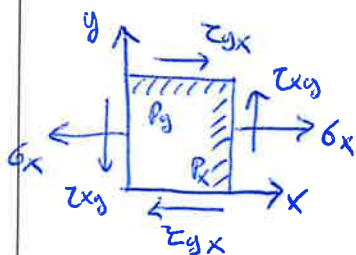
Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi  $x$  e  $y$  ai vettori sforzo (piani)  $\vec{t}_x$  e  $\vec{t}_y$  rispettivamente; di questi  $\vec{t}_x$  è inclinato rispetto all'asse  $x$  di un angolo  $\alpha = 45^\circ$  (sicché:  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ) e ha modulo di valore  $|\vec{t}_x| = 50$  MPa. L'altro vettore sforzo,  $\vec{t}_y$ , è invece *orizzontale* (ma di verso non specificato!), come indicato in Figura. Si chiede di determinare le componenti  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , e la massima tensione tangenziale,  $\tau_{\max}$ . Determinare inoltre quanto vale l'angolo  $\varphi$  formato dall'asse  $x$  e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo,  $\sigma_1$ .



$\sigma_x = 35,355$  (MPa);  $\sigma_y = 0,000$  (MPa);  $\tau_{xy} = 35,355$  (MPa);

$\sigma_1 = 57,206$  (MPa);  $\sigma_2 = -21,851$  (MPa);  $\tau_{\max} = 39,528$  (MPa);

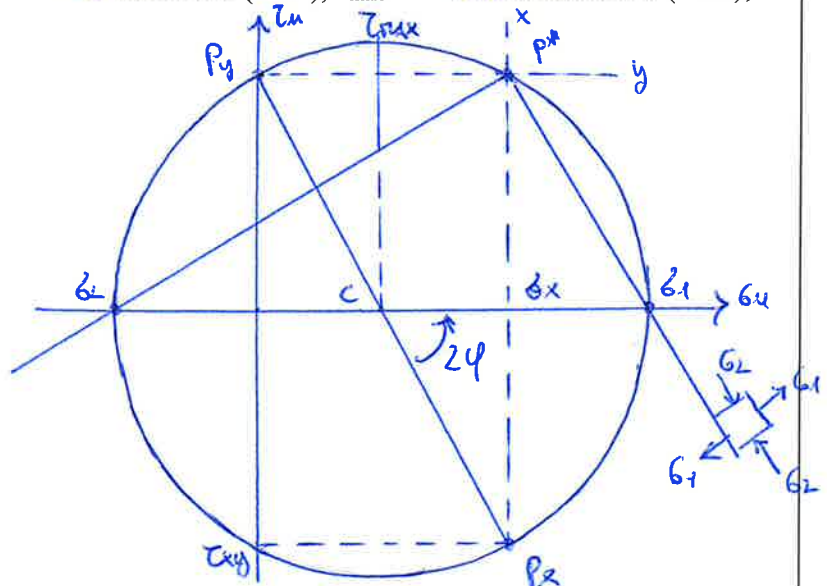
cerchio di Mohr:

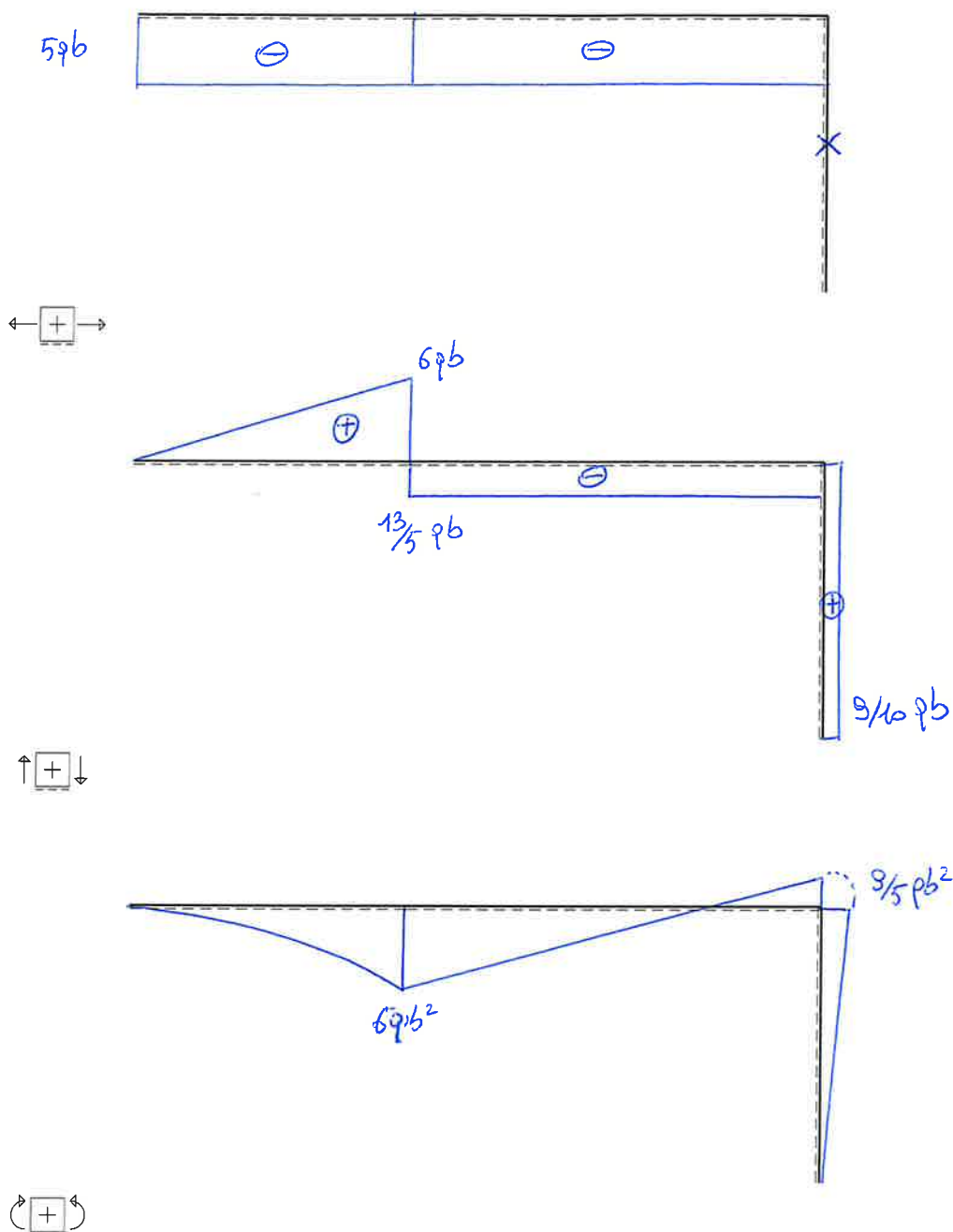


$P_x = (35,355; -35,355)$

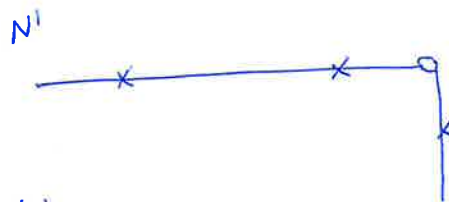
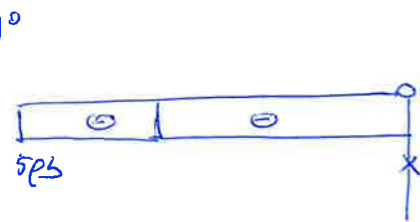
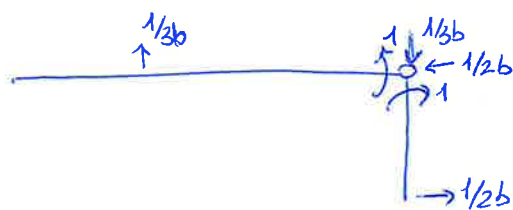
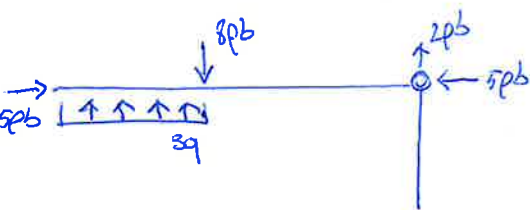
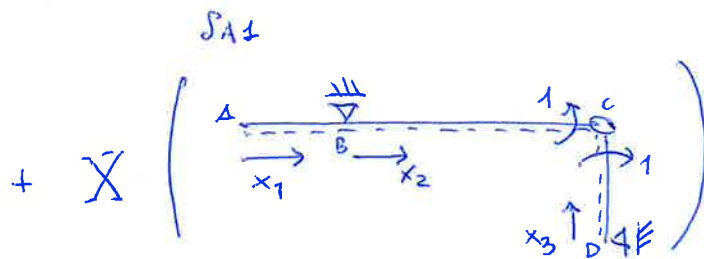
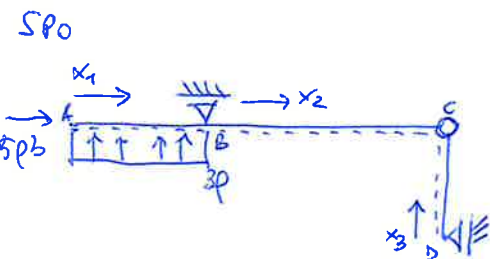
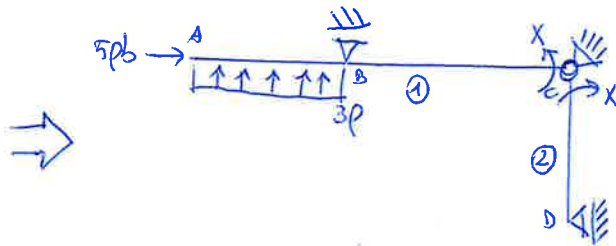
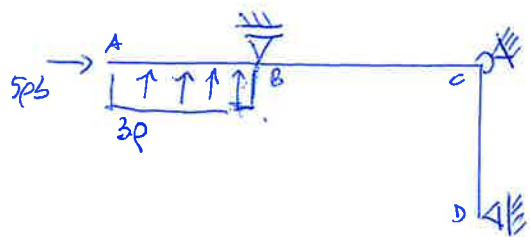
$P_y = (0,000; 35,355)$

$\varphi = 31,717$  (°);





$V_B(\uparrow) = -\frac{9}{5}qb$	$H_C(\Rightarrow) = -\frac{9}{10}qb$	$V_C(\uparrow) = \frac{13}{5}qb$	$H_D(\Rightarrow) = -\frac{9}{10}qb$	$M_C(\curvearrowright) = -\frac{9}{5}qb^2$
$N_{AB} = -5qb$	$T_{AB} = 3q \times 1$	$M_{AB} = \frac{3}{2}q \times 1^2$		
$N_{BC} = -5qb$	$T_{BC} = -\frac{13}{5}qb$	$M_{BC} = 6qb^2 - \frac{13}{5}qb \times 2$		
$N_{DC} = //$	$T_{DC} = \frac{9}{10}qb$	$M_{DC} = -\frac{9}{10}qb \times 3$		
$v_A = \frac{81qb^4}{5EI} (\uparrow)$				



$$N_{AB}^0 = -5pb$$

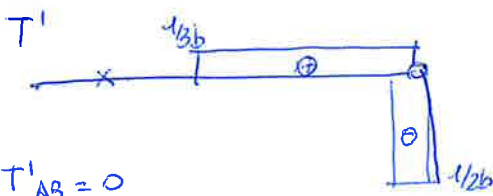
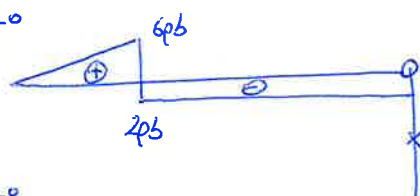
$$N_{BC}^0 = -5pb$$

$$N_{DC}^0 = 0$$

$$N_{AB}^1 = 0$$

$$N_{BC}^1 = 0$$

$$N_{DC}^1 = 0$$



$$T_{AB}^0 = 3px_1$$

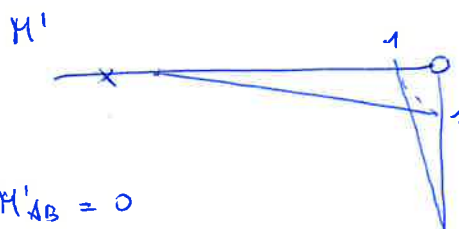
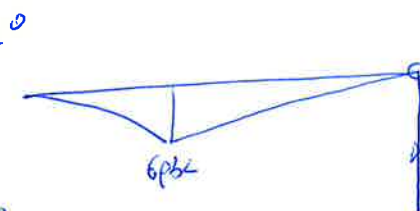
$$T_{BC}^0 = -2pb$$

$$T_{DC}^0 = 0$$

$$T_{AB}^1 = 0$$

$$T_{BC}^1 = 1/3b$$

$$T_{DC}^1 = -1/2b$$



$$M_{AB}^0 = 3/2 px_1^2$$

$$M_{BC}^0 = 6pbx_2 - 2pbx_2$$

$$M_{DC}^0 = 0$$

$$M_{AB}^1 = 0$$

$$M_{BC}^1 = 1/3b x_2$$

$$M_{DC}^1 = 1/2b x_3$$

**CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI**

A.A. 2024-2025

Prova scritta in aula del 14.01.2025

Parte II - Testo 2

*Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.*

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

**Esercizio n. 1 (17 punti)**

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità  $C$ ,  $M_C$ .

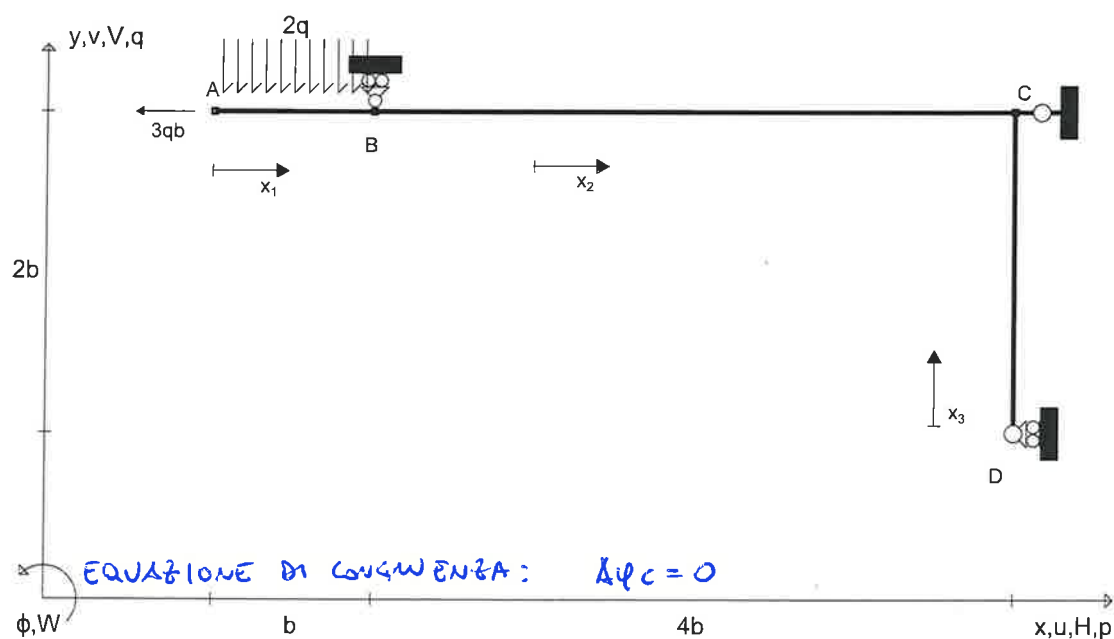
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, la componente di spostamento verticale del punto  $A$ ,  $v_A$ .

*Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.*

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 2 14.01.25\*002



## Esercizio n. 2 (7 punti)

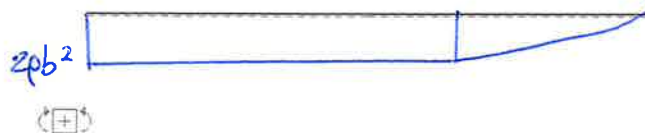
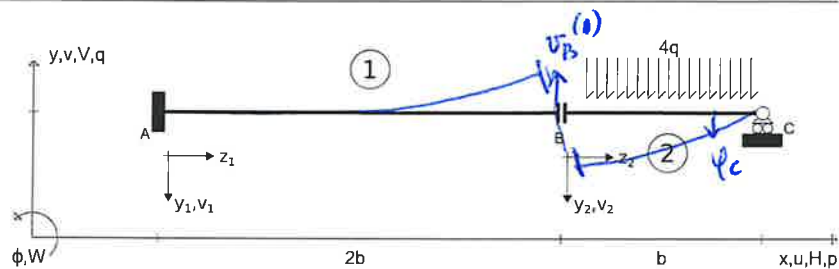
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

1. La deformata della linea d'asse,  $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$ ;
2. La sua derivata prima,  $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$ ;
3. La rotazione del punto  $C$ ,  $\varphi_C$ ;
4. Lo spostamento verticale del punto  $B$  relativo al primo tratto,  $v_B^{(1)}$ .

Università di Cagliari

SdC\_SdA 2 14.01.25\*002



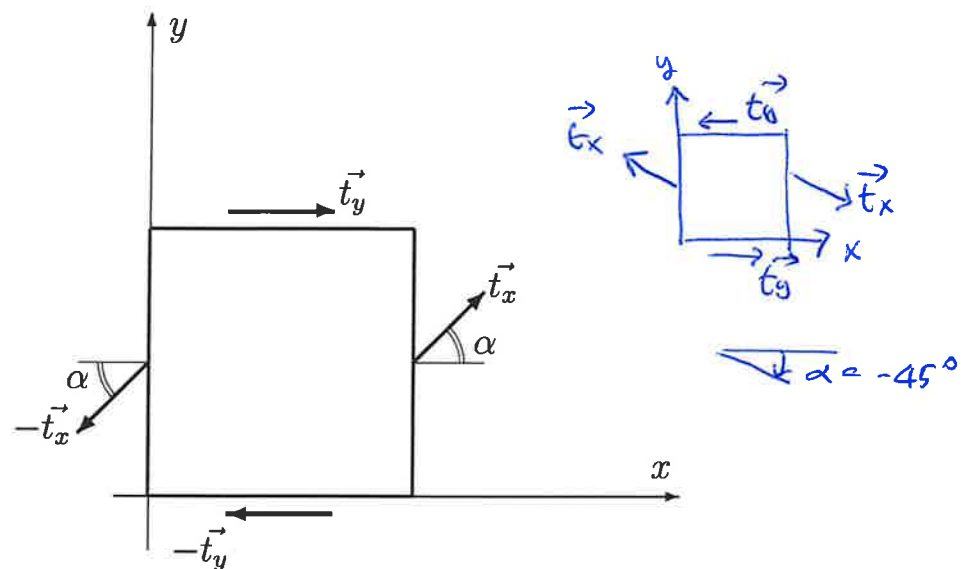
$$\begin{aligned}
 H_A (\Rightarrow) &= 0; & V_A (\uparrow) &= 0; & M_A (\curvearrowright) &= -2pb^2; & V_C (\uparrow) &= 4pb; \\
 N_{AB} &= 0; & T_{AB} &= 0; & M_{AB} &= 2pb^2; \\
 N_{BC} &= 0; & T_{BC} &= -4pb^2; & M_{BC} &= 2pb^2 - 2qz_2^2; \\
 \text{c.c in } A &= v_1(z_1=0)=0, \quad v_1'(z_1=0)=0; & \text{c.c in } B &= v_1'(z_1=b)=v_2'(z_2=0); \\
 & & \text{c.c in } C &= v_2(z_2=b)=0; \\
 v_1(z_1) &= \frac{1}{EJ} (-pb^2 z_1^2); & v_1'(z_1) &= \frac{1}{EJ} (-2pb^2 z_1); \\
 v_2(z_2) &= \frac{1}{EJ} (-pb^2 z_2^2 + \frac{1}{6}pb^2 z_2^3 - 4pb^3 z_2 + \frac{28}{6}pb^4); & v_2'(z_2) &= \frac{1}{EJ} (-2pb^2 z_2 + \frac{1}{3}pb^2 z_2^2 - 4pb^3); \\
 v_B^{(1)} &= -4pb^4/EJ \quad (\uparrow); & \varphi_C &= -16pb^3/3EJ \quad (\downarrow);
 \end{aligned}$$

### Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi  $x$  e  $y$  ai vettori sforzo (piani)  $\vec{t}_x$  e  $\vec{t}_y$  rispettivamente; di questi  $\vec{t}_x$  è inclinato rispetto all'asse  $x$  di un angolo  $\alpha = -45^\circ$  (sicché:  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ) e ha modulo di valore  $|\vec{t}_x| = 30$  MPa. L'altro vettore sforzo,  $\vec{t}_y$ , è invece *orizzontale* (ma di verso non specificato!), come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , e la massima tensione tangenziale,  $\tau_{\max}$ .

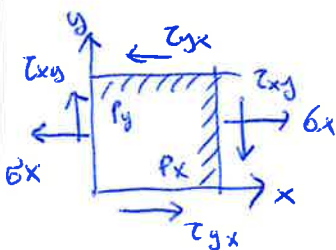
Determinare inoltre quanto vale l'angolo  $\varphi$  formato dall'asse  $x$  e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo,  $\sigma_1$ .



$$\sigma_x = 21,213 \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0,000 \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = -21,213 \text{ (MPa)};$$

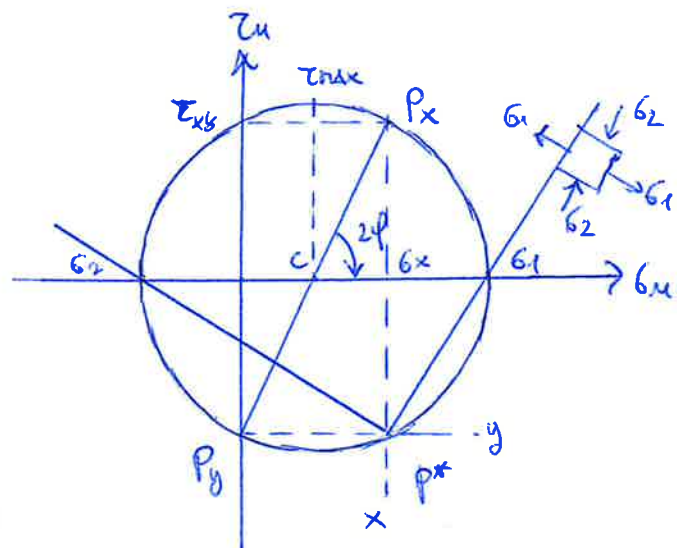
$$\sigma_1 = 34,323 \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -13,110 \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = 23,717 \text{ (MPa)};$$

cerchio di Mohr:

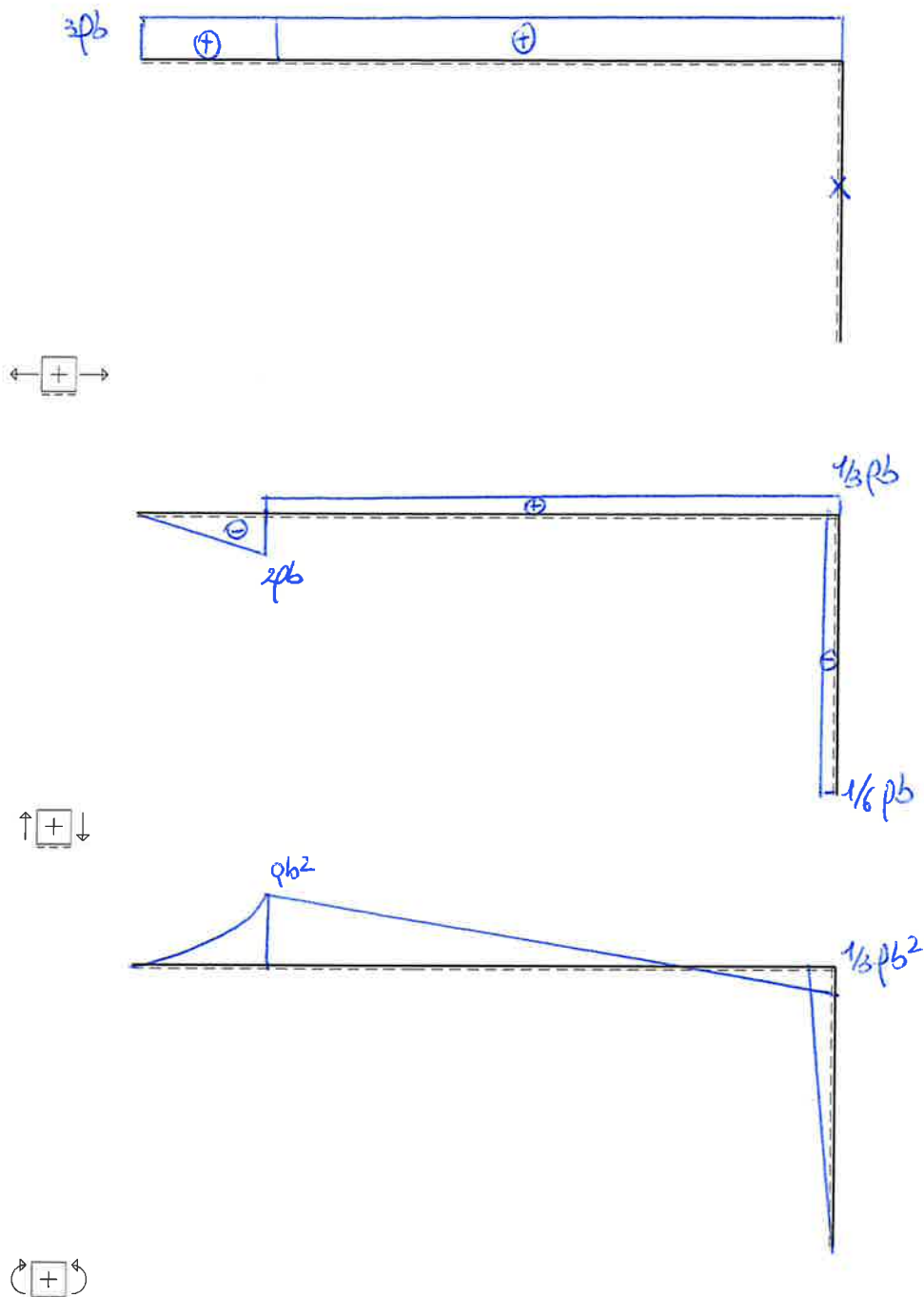


$$P_x = (21,213; 21,213)$$

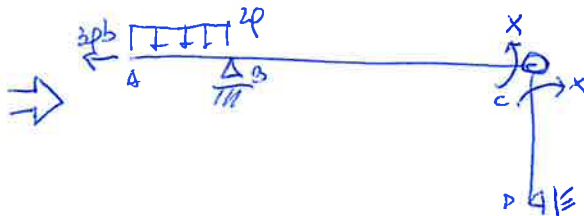
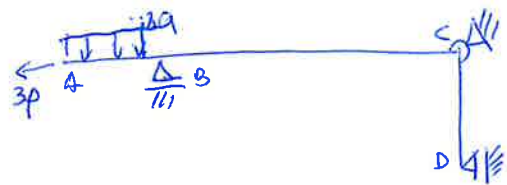
$$P_y = (0,000; -21,213)$$



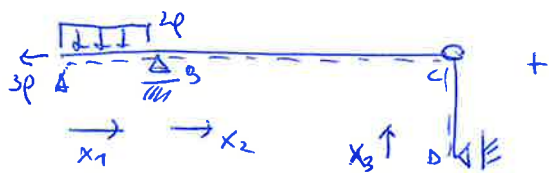
$$\varphi = -31,717 \text{ (}^\circ\text{)};$$



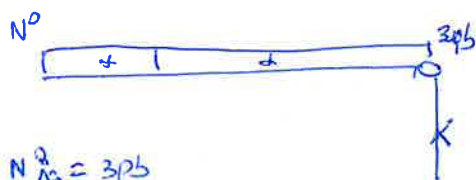
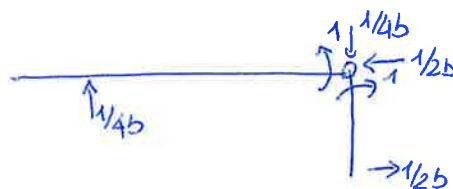
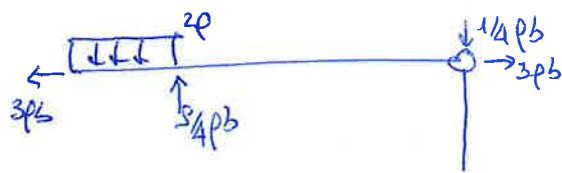
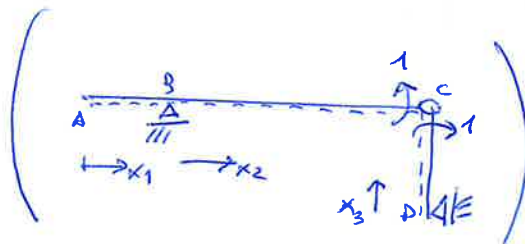
$V_B(\uparrow) = 3pb$	$H_C(\Rightarrow) = 17/6 pb$	$V_C(\uparrow) = -1/6 pb$	$H_D(\Rightarrow) = 1/6 pb$	$M_C(\curvearrowright) = 1/3 pb^2$
$N_{AB} = 3pb$	$T_{AB} = -29x_1$	$M_{AB} = -px_1^2$		
$N_{BC} = 3pb$	$T_{BC} = 1/3 pb$	$M_{BC} = -pb^2 + 1/3 pbx_2$		
$N_{DC} = "$	$T_{DC} = -1/6 pb$	$M_{DC} = 1/6 pbx_3$		
$v_A = -48 pb^4 / 36 EI \quad (\downarrow)$				



SP0



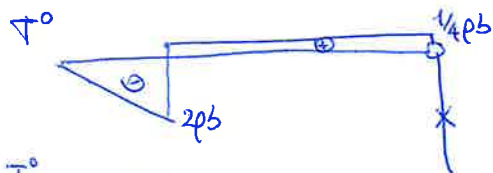
X



$$N_{AB}^0 = 3pb$$

$$N_{BC}^0 = 3pb$$

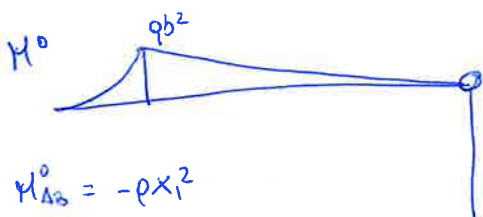
$$N_{DC}^0 = 0$$



$$T_{AB}^0 = -2pb$$

$$T_{BC}^0 = 1/4pb$$

$$T_{DC}^0 = 0$$



$$M_{AB}^0 = -pb^2$$

$$M_{BC}^0 = -pb^2 + 1/4qb^2$$

$$M_{DC}^0 = 0$$

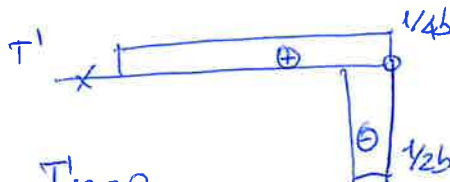
N'



$$N_{AB}' = 0$$

$$N_{BC}' = 0$$

$$N_{DC}' = 0$$

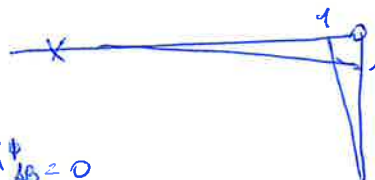


$$T_{AB}' = 0$$

$$T_{BC}' = 1/4b$$

$$T_{DC}' = -1/2b$$

M'



$$M_{AB}' = 0$$

$$M_{BC}' = 1/4b^2$$

$$M_{DC}' = 1/2b^2$$